【理工学研究科院物理学専攻（専門）解答例と出題意図】

問１

【出題意図】

　減衰振動に関する出題である。設問(1)では、減衰振動の運動方程式を微分方程式として解答させる。設問(2)(3)では、設問(1)で導いた運動方程式の特性方程式を求めさせる。設問(4)(5)では、特定の抵抗の範囲において初期条件を与えたうえ、解を求めさせる。

【解答例】

(1) 求める運動方程式は、

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x - 2m\gamma\dot{x}$$
$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \ \cdots (1)$$

(2) $x = e^{\lambda t}$を式(1)に代入すると、

$$(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2)e^{\lambda t} = 0$$

したがって、特性方程式は、

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \ \cdots (2)$$

(3) 式(2)より、

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

(4) $\omega_0 > \gamma$より、λは虚数となる。$\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = i\omega$とおくと、

$$\lambda = -\gamma \pm i\omega$$

したがって、この場合の一般解は、

$$x = C_1 e^{-\gamma t + i\omega t} + C_2 e^{-\gamma t - i\omega t}$$

ここで、C_1およびC_2は任意定数である。

オイラーの公式$e^{\pm i\omega t} = \cos\omega t \pm i\sin\omega t$を用いて実数の解を作ると、

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^{-\gamma t + i\omega t} + C_2 e^{-\gamma t - i\omega t} = e^{-\gamma t}\left(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\right) \\ &= e^{-\gamma t}(C_1\cos\omega t + iC_1\sin\omega t + C_2\cos\omega t - iC_2\sin\omega t) \\ &= e^{-\gamma t}\{(C_1 + C_2)\cos\omega t + i(C_1 - C_2)\sin\omega t\} \\ &= e^{-\gamma t}(C_3\cos\omega t + C_4\sin\omega t) \ \cdots (3) \end{aligned}$$

ここで、$C_3 = C_1 + C_2$および$C_4 = i(C_1 - C_2)$である。

(5) $t = 0$のときに$x = A$より、

$$A = e^{-\gamma 0}(C_3\cos 0 + C_4\sin 0)$$
$$C_3 = A \ \cdots (4)$$

一方、$\dot{x} = -\gamma e^{-\gamma t}(C_3\cos\omega t + C_4\sin\omega t) + e^{-\gamma t}(-C_3\omega\sin\omega t + C_4\omega\cos\omega t)$

$t = 0$のとき$\dot{x} = 0$により、

$$0 = -\gamma e^0(C_3\cos 0 + C_4\sin 0) + e^0(-C_3\omega\sin 0 + C_4\omega\cos 0)$$

$$= -\gamma C_3 + C_4\omega$$

$$\therefore C_4 = \frac{\gamma}{\omega} C_3 \ \cdots (5)$$

式(3), (4), (5)より、

$$x = Ae^{-\gamma t}\left(\cos\omega t + \frac{\gamma}{\omega}\sin\omega t\right)$$

問２

【出題意図】

量子力学における１次元シュレーディンガー方程式、及びその解法についての理解度を問う問題である。(1) は系のポテンシャルが与えられているときに、時間に依存しないシュレーディンガー方程式を正しく記述できるかを見ること意図している。(2) 以降は、１変数２階の微分方程式の解法についての問題となっており、(2) は (3) 以降を解くための計算手順、(3) においては定数係数の場合、(4) 以降は級数展開法を用いる場合について、問題を読みながら解く形式を用いている。これにより、与えられた情報を用いながら、計算をして解く能力があるかを見ることを意図している。

【解答例】

(1)

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+U_0(\mathrm{e}^{-2x/a}-2\mathrm{e}^{-x/a})\right\}\phi(x)=E\phi(x)$$

(2) $\eta=\mathrm{e}^{-x/a}$ より、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}&=\frac{d\eta}{dx}\frac{d}{d\eta}=-\frac{\mathrm{e}^{-x/a}}{a}\frac{d}{d\eta}=-\frac{\eta}{a}\frac{d}{d\eta}\\ \frac{d^2}{dx^2}&=\left(-\frac{\eta}{a}\frac{d}{d\eta}\right)\left(-\frac{\eta}{a}\frac{d}{d\eta}\right)=\frac{\eta}{a^2}\frac{d}{d\eta}+\frac{\eta^2}{a^2}\frac{d^2}{d\eta^2}\end{aligned}\tag{1}$$

(1) のシュレーディンガー方程式に、式 (1) を代入すると、

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\eta^2}{a^2}\frac{d^2}{d\eta^2}+\frac{\eta}{a^2}\frac{d}{d\eta}\right)+U_0(\eta^2-2\eta)\right\}u(\eta)=Eu(\eta)$$

$$\left\{\frac{d^2}{d\eta^2}+\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}-\frac{2ma^2U_0}{\hbar^2}\frac{1}{\eta^2}(\eta^2-2\eta)\right\}u(\eta)=-\frac{2ma^2E}{\hbar^2}\frac{1}{\eta^2}u(\eta)$$

$\lambda=\sqrt{\dfrac{2ma^2U_0}{\hbar^2}},\ k=\sqrt{\dfrac{(-E)2ma^2}{\hbar^2}}$ を用いて書き直すと、

$$\left\{\frac{\eta^2}{a^2}\frac{d^2}{d\eta^2}+\frac{\eta}{a^2}\frac{d}{d\eta}-\frac{\lambda^2}{\eta^2}(\eta^2-2\eta)\right\}u(\eta)=\frac{k^2}{\eta^2}u(\eta)$$

$$\left\{\frac{\eta^2}{a^2}\frac{d^2}{d\eta^2}+\frac{\eta}{a^2}\frac{d}{d\eta}-\left(\lambda^2-\frac{2\lambda^2}{\eta}+\frac{k^2}{\eta^2}\right)\right\}u(\eta)=0$$

よって、（ア）の式が得られる。（証明終わり）

(3) 式（イ）の解は、

$$u(\eta) = A\mathrm{e}^{\lambda\eta} + B\mathrm{e}^{-\lambda\eta} \quad （A,\ B \text{ は定数}）$$

となる。

問題文にある条件より、$\eta \to \infty$ で、$\lim_{\eta\to\infty} u(\eta) = A = 0$ となるので、$A = 0$。

$\eta \to +0$ で、$\lim_{\eta\to+0} u(\eta) = B = C$ となるので $B = C$。

よって、$u(\eta) = C\mathrm{e}^{-\lambda\eta}$ （答）

(4) 式（ウ）に、$u(\eta) = D\eta^s$ を代入すると、

$$\left(\frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta} - \frac{k^2}{\eta^2}\right) D\eta^s = D\left\{s(s-1)\eta^{s-2} + s\eta^{s-2} - k^2\eta^{s-2}\right\} = 0$$

よって、

$$s(s-1) + s - k^2 = 0$$

$$s^2 - k^2 = 0$$

$$s = \pm k$$

条件 $s > 0$ より、$s = k$（答）

(5) 式（エ）へ $f(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\eta^n$ を代入すると、（エ）の右辺は、

$$\begin{aligned}
&\eta\frac{d^2}{d\eta^2} + (2k+1-2\lambda\eta)\frac{df}{d\eta} - \lambda(2k+1-2\lambda)f \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} C_n n(n-1)\eta^{n-1} + (2k+1)\sum_{n=1}^{\infty} C_n n\eta^{n-1} - 2\lambda\sum_{n=1}^{\infty} C_n n\eta^n \\
&\qquad - \lambda(2k+1-2\lambda)\sum_{n=0}^{\infty} C_n\eta^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} C_n n(n-1)\eta^{n-1} + (2k+1)\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}(n+1)\eta^n - 2\lambda\sum_{n=0}^{\infty} C_n n\eta^n \\
&\qquad - \lambda(2k+1-2\lambda)\sum_{n=0}^{\infty} C_n\eta^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}(n+1)n\eta^n + (2k+1)\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}(n+1)\eta^n \\
&\qquad - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(2n+2k+1-2\lambda)C_n\eta^n
\end{aligned}$$

よって、式（エ）は、

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\{(n+1)n+(2k+1)(n+1)\}C_{n+1}-\lambda(2n+2k+1-2\lambda)C_n\right]\eta^n=0$$

となり、式（オ）と一致する。（証明終わり）

(6) 式（オ）より、$n \geq 0$ に対して、

$$\{(n+1)n+(2k+1)(n+1)\}C_{n+1}-\lambda(2n+2k+1-2\lambda)C_n=0$$

が成立する。$f(\eta)$ が、N 次の多項式のとき、$C_{N+1}=0,\, C_N \neq 0$ となるので、

$$\{(N+1)N+(2k+1)(N+1)\}C_{N+1}-\lambda(2N+2k+1-2\lambda)C_N$$

$$=-\lambda(2N+2k+1-2\lambda)C_N=0$$

$$\therefore 2N+2k+1-2\lambda=0$$

よって、$N=\ \lambda-k-\dfrac{1}{2}$（答）

(7) 問題 (6) より、$k=\lambda-N-\dfrac{1}{2}$ となるので、

$$E_N=-\frac{\hbar^2k^2}{2ma^2}=-\frac{\hbar^2}{2ma^2}\left(\lambda-N-\frac{1}{2}\right)^2 \qquad \text{（答）}$$

$\lambda=\sqrt{\dfrac{2ma^2U_0}{\hbar^2}}$ を用いて、

$$E_N=-\frac{\hbar^2}{2ma^2}\left\{\sqrt{\frac{2ma^2U_0}{\hbar^2}}-\left(N+\frac{1}{2}\right)\right\}^2=-U_0\left\{1-\sqrt{\frac{\hbar^2}{2ma^2U_0}}\left(N+\frac{1}{2}\right)\right\}^2$$

としても良い。

問３

【出題意図】

電磁気学における静電場中のガウスの法則の理解度を問うことを意図している。無限に長い円柱において、(a) は、円柱の外、(b) は円柱の中における電場の大きさを、積分形のガウスの法則を適用して求める問題である。(c) はデカルト座標系を用いて、系の対称性と電場の方向について関連付けて考えられるか、及び電場の方向を座標を用いて表すことができるかを問題としている。(d) は (c) で用いた円柱の内外の div$\boldsymbol{E}$ を求めることにより、ベクトル解析関連の計算ができるかを見ている。

【解答例】

(a) 半径 $r(r > a)$ の領域において、

$$\int_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} dS = E \cdot 2\pi r l$$
$$\int_V \rho dV = \rho_0 \pi a^2 l$$

となるので、ガウスの法則へ代入すると、

$$E \cdot 2\pi r l = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_0 \pi a^2 l \qquad \therefore E = \frac{\rho_0 a^2}{2\varepsilon_0 r} \quad \text{（答）}$$

(b) 半径 $r(r < a)$ の領域において、

$$\int_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} dS = E \cdot 2\pi r l$$
$$\int_V \rho dV = \rho_0 \pi r^2 l$$

となるので、ガウスの法則へ代入すると、

$$E \cdot 2\pi r l = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_0 \pi r^2 l \qquad \therefore E = \frac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0} \quad \text{（答）}$$

(c) z 軸を円柱の中心軸にとったとき、$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ となる。

系は軸対称なので、電場 $\boldsymbol{E}$ の方向は、(a)(b) いずれの場合も、単位ベクトル

$$\boldsymbol{e} = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, 0\right)$$

の方向となるため、電場は $\boldsymbol{E} = E\boldsymbol{e}$ となる。よって、$r > a$ のときは (a) より、

$$\boldsymbol{E} = \left(\frac{\rho_0 a^2}{2\varepsilon_0 r}\frac{x}{r},\ \frac{\rho_0 a^2}{2\varepsilon_0 r}\frac{y}{r},\ 0\right) = \left(\frac{\rho_0 a^2 x}{2\varepsilon_0(x^2+y^2)},\ \frac{\rho_0 a^2 y}{2\varepsilon_0(x^2+y^2)},\ 0\right)$$

$r < a$ のときは (b) より、

$$\boldsymbol{E} = \left(\frac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0}\frac{x}{r},\ \frac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0}\frac{y}{r},\ 0\right) = \left(\frac{\rho_0 x}{2\varepsilon_0},\ \frac{\rho_0 y}{2\varepsilon_0},\ 0\right)$$

（答）$r > a$ のとき、$\boldsymbol{E} = \left(\frac{\rho_0 a^2 x}{2\varepsilon_0(x^2+y^2)},\ \frac{\rho_0 a^2 y}{2\varepsilon_0(x^2+y^2)},\ 0\right)$

$r < a$ のとき、$\boldsymbol{E} = \left(\frac{\rho_0 x}{2\varepsilon_0},\ \frac{\rho_0 y}{2\varepsilon_0},\ 0\right)$

(d) $r > a$ のとき、

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\boldsymbol{E} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\rho_0 a^2 x}{2\varepsilon_0(x^2+y^2)} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\rho_0 a^2 y}{2\varepsilon_0(x^2+y^2)} + \frac{\partial}{\partial z}0 \\
&= \left(\frac{\rho_0 a^2}{2\varepsilon_0(x^2+y^2)} - \frac{2\rho_0 a^2 x^2}{2\varepsilon_0(x^2+y^2)^2}\right) + \left(\frac{\rho_0 a^2}{2\varepsilon_0(x^2+y^2)} - \frac{2\rho_0 a^2 y^2}{2\varepsilon_0(x^2+y^2)^2}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$r < a$ のとき、

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\rho_0 x}{2\varepsilon_0} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\rho_0 y}{2\varepsilon_0} + \frac{\partial}{\partial z}0 = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}$$

（答）$r > a$ のとき、$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = 0,$ $r < a$ のとき、$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0},$

問4

【出題意図】
(1)は日本語の条件を数式に変換して考える能力を問うている。(2)は学部で学ぶ力学の基礎を理解し数学を適切に使えるか確認している。

【解答例】
(1) 条件1, 3より

$$m - n = 5 \text{ のとき } \quad \frac{I_n}{I_m} = 100$$

これと条件2より

$$m - n = 1 \text{ ごとに } \quad \frac{I_n}{I_m} = \sqrt[5]{100} \text{ 倍}$$

となるので、

$$\frac{I_n}{I_m} = 100^{\frac{m-n}{5}} = 10^{\frac{2}{5}(m-n)}$$

が成り立つ。両辺logを取って

$$m - n = 2.5 \log_{10}\left(\frac{I_n}{I_m}\right)$$

となる。

(2)(i) 点Qにおける θ 方向の微小長さは $r\,d\theta$, φ 方向の微小長さは $r\sin\theta\,d\varphi$ なので

$$dV = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr$$

(ii) dVが点Pに作る重力ポテンシャルは

$$-\frac{G\rho\, dV}{l} = -\frac{G\rho}{l} r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr$$

(iii) 余弦定理より

$$l = (R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta)^{\frac{1}{2}}$$

(iv) (ii)の結果に(iii)を代入して積分する。

$$-G\rho r^2\, dr \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta (R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta)^{-\frac{1}{2}}\, d\theta\, d\varphi$$

$$= -G\rho r^2 dr\; 2\pi \left(\frac{2}{2Rr}\right)\left[(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta)^{\frac{1}{2}}\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{4\pi G\rho}{R} r\, dr$$

すなわち、点Pに球殻が作る重力ポテンシャルは、球殻の質量がすべて球の中心にある場合と同じになる。