2024 年度　大学院 理工学研究科　博士前期課程
一般入学試験 1 期　物理学専攻
専門科目

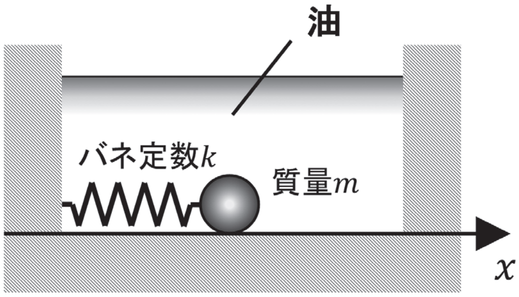
試験室への持ち込み：関数電卓　持ち込み可

【解答上の注意】出題された 4 問の中から 2 問を選び，それらの解答をそれぞれ別の解答用紙に記入せよ。

小野寺研究室を志望する学生は，選択する 2 題のうち 1 題を必ず [問題 4] にすること。

問題 1

バネ定数が k のバネにつながれた質量 m のおもりが油の中で x 軸方向に振動している（重力の影響は無視できるとする)。時刻 t におけるバネの伸びを x とすると、おもりは速度 $\dot{x}$ に比例する抵抗 $-2m\gamma\dot{x}$ $(\gamma>0)$ を受ける（バネ自身は抵抗を受けない)。なお、油から受ける抵抗がない時（$\gamma=0$）の角振動数を ω_0 とすると、$k=m\omega_0^2$ である。



（1）おもりの運動方程式を微分方程式として書け。

（2）$x = e^{\lambda t}$ と仮定したときに得られる特性方程式を書け。

（3）上記 (2) で得られた特性方程式を解き、λ を求めよ。

（4）$\omega_0 > \gamma$ のときの一般解を求めよ。

（5）$\omega_0 > \gamma$ のとき、初期条件として $t = 0$ のときに $x = \mathrm{A}$ と $\dot{x} = 0$ が与えられた場合の解を求めよ。

2024年度　大学院 理工学研究科　博士前期課程
一般入学試験1期　物理学専攻
専門科目

試験室への持ち込み：関数電卓　持ち込み可

問題2

1次元において，以下のようなポテンシャル $V(x) = U_0\left(\mathrm{e}^{-2x/a} - 2\mathrm{e}^{-x/a}\right)$ 中で束縛状態にある粒子を考える。以下の問に答えよ。ただし， $U_0 > 0,\, a > 0$ とし，粒子の質量，およびエネルギーをそれぞれ m，E $(E < 0)$ とする。

(1) 粒子の波動関数 $\phi(x)$ に対する時間に依存しないシュレーディンガー方程式を書け。

(2) $\eta = \mathrm{e}^{-x/a}$ とする。(1) で得られたシュレーディンガー方程式を η を用いて書き直したとき、

$$\left[\frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta} - \left(\lambda^2 - \frac{2\lambda^2}{\eta} + \frac{k^2}{\eta^2}\right)\right] u(\eta) = 0 \qquad (\text{ア})$$

と表されることを示せ。但し、$\lambda = \sqrt{2ma^2U_0/\hbar^2}$, $k = \sqrt{(-E)2ma^2/\hbar^2}$, $u(\eta) = \phi(x)$ とする。

(3) (2) の式 (ア) は、$\eta \to +\infty$ で、

$$\left(\frac{d^2}{d\eta^2} - \lambda^2\right) u(\eta) = 0 \qquad (\text{イ})$$

となる。式 (イ) の解で、$\eta \to +\infty$ でゼロ、$\eta \to +0$ で C (C は定数) となるような解を求めよ。

(4) 式 (ア) の解で $\eta \to 0$ で有限となる解が、$u(\eta) = D\eta^s$ (D は定数, $s > 0$) で与えられるとき、(2) の式 (ア) は $\eta \to +0$ で、

$$\left(\frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta} - \frac{k^2}{\eta^2}\right) u(\eta) = 0 \qquad (\text{ウ})$$

となる。s を求めよ。

(5) $u = \mathrm{e}^{-\lambda\eta}\eta^k f(\eta)$ とおいたとき、$f(\eta)$ に対する方程式は、

$$\eta\frac{d^2 f}{d\eta^2} + (2k+1-2\lambda\eta)\frac{df}{d\eta} - \lambda(2k+1-2\lambda)f = 0 \qquad (エ)$$

となる。$f(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\eta^n$ と級数展開をして式 (エ) に代入することにより、

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\{(n+1)n + (2k+1)(n+1)\}C_{n+1} - \lambda(2n+2k+1-2\lambda)C_n\right]\eta^n = 0 \qquad (オ)$$

となることを示せ。

(6) $u(\eta)$ が無限級数のとき、(オ) の式より、$\eta \to \infty$ で、$f \sim \mathrm{e}^{2\lambda\eta}$、すなわち、$u \sim \mathrm{e}^{\lambda\eta}\eta^k$ となり発散してしまうので、$u(\eta)$ が発散しないためには $f(\eta) = \sum_{n=0}^{N} C_n\eta^n$ のように N 次の多項式となる。このとき、N を求めよ。

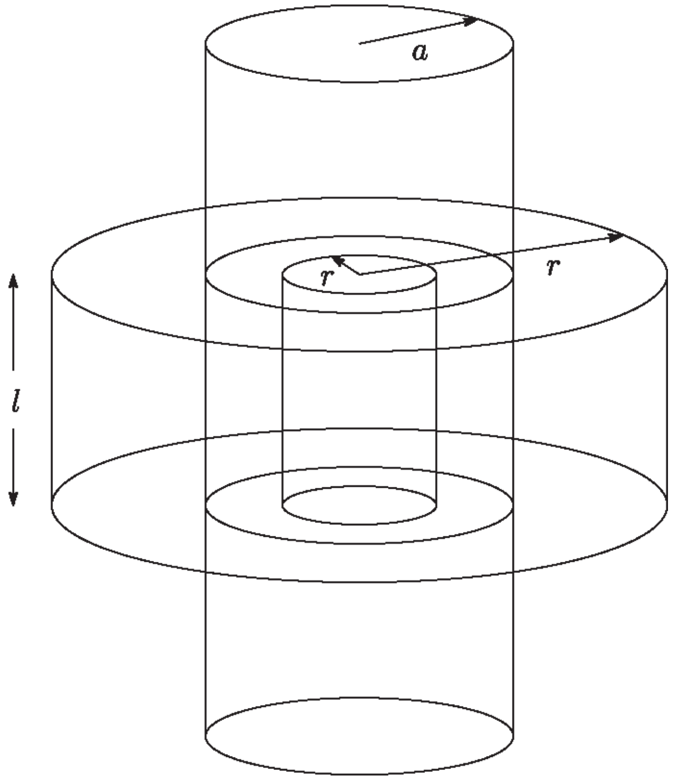
(7) (6) で求めた N に対応するエネルギー固有値 $E = E_N$ を、N の関数として表せ。

2024 年度　大学院 理工学研究科　博士前期課程
一般入学試験 1 期　物理学専攻
専門科目

試験室への持ち込み：関数電卓　持ち込み可

問題 3

無限に長い半径 a の円柱の内部に、電荷が ρ_0 (> 0) の電荷密度で一様に分布している。一方、円柱の外部は真空と考えてよいものとする。真空の誘電率を ε_0 として、次の設問に答えよ。



(a) 半径 r ($r > a$) 、長さ l の円柱形の閉曲面を考え、この閉曲面 S に対して積分形のガウスの法則

$$\int_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV$$

を適用して、この閉曲面の側面における電場の大きさ E を求めよ。

(b) 半径 r ($r < a$) 、長さ l の円柱形の閉曲面を考え、この閉曲面に対して積分形のガウスの法則を適用して、この閉曲面の側面における電場の大きさ E を求めよ。

(c) 上問 (a) で求めた $r > a$ における電場、及び上問 (b) で求めた $r < a$ における電場のそれぞれについて、ベクトル表記 $\boldsymbol{E} = (E_x, E_y, E_z)$ せよ。ただし、z 軸を円柱の中心軸に取り、$\boldsymbol{E}$ の各成分は r を使わず x、y、z の関数として表すこと。

(d) 上問 (c) で求めた $\boldsymbol{E}$ を用いて $\mathrm{div}\boldsymbol{E} \left(= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)$ を $r < a$ と $r > a$ のそれぞれについて計算せよ。

2024 年度　大学院 理工学研究科　博士前期課程
一般入学試験１期　物理学専攻
専門科目

試験室への持ち込み：関数電卓　持ち込み可

問題４

⑴ 天文学では、天体の明るさを「等級」を用いて表すことが多い。等級の定義は下記の通りである。

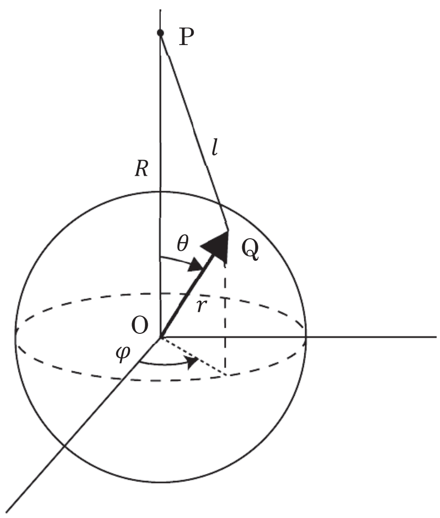
定義１：明るさが明るいほど、等級の数値は小さい。

定義２：明るさの比が等しいときは、等級差も等しい。

定義３：明るさの比が 100 倍であるとき、等級差は５等級である。

いま、２つの星の明るさと等級をそれぞれI_m, mおよび I_n, nとする。上記の定義1～3 を用いて、$m-n$をI_mとI_nの式として表せ。

⑵ 右図に示された極座標系において，半径r，一様密度ρの薄い球殻を考える。また，原点Ｏを球の中心にとる。



（ｉ）球殻の厚みをdrとする。点Ｑにおける微小体積dVを，θ，φ方向の微小角度$d\theta$，$d\varphi$を使って表せ。

（ⅱ）点Ｑにおける微小体積dVによって点Ｐにできる重力ポテンシャルを，（ｉ)の結果と$\overline{PQ}=l$を使って表せ。

（ⅲ）$\overline{OP}=R$とし，△OPQ についての余弦定理からlを求めよ。

（ⅳ）(ⅲ)の結果を(ⅱ)の結果に代入して，$\varphi=0\sim2\pi$，$\theta=0\sim\pi$の区間で積分することにより，球殻全体が点Ｐにつくる重力ポテンシャルを求めよ。ただし点Ｐは球殻の外部にあるとする。