

【理工学研究科物理学専攻（専門）解答例と出題意図】

問題 I

【解答例】

(1) $\mathbf{r}(t) = (r_{0x}, v_{0y}t, -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t)$ より、

$$\mathbf{r}(0) = (r_{0x}, v_{0y} \cdot 0, -\frac{1}{2}g0^2 + v_{0z}0) = (r_{0x}, 0, 0)$$

(2)

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} r_{0x} \\ v_{0y}t \\ -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_{0y} \\ -gt + v_{0z} \end{pmatrix}$$

(3)

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} 0 \\ v_{0y} \\ -gt + v_{0z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

(4) 加速度の大きさは加速度ベクトルの大きさ $|a|$ であるから、

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-g)^2} = g$$

(5) $\mathbf{r}(t)$ の y, z 成分は、

$$\begin{aligned} y &= v_{0y}t \\ z &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t \end{aligned}$$

これらの式から t を消去して、軌跡 (y, z) を求める。 y の式を

$$t = \frac{y}{v_{0y}}$$

と変形し、 z の式に代入すると、

$$z = -\frac{1}{2}g\left(\frac{y}{v_{0y}}\right)^2 + v_{0z}\frac{y}{v_{0y}}$$
$$z = -\frac{1}{2v_{0y}^2}y^2 + \frac{v_{0z}}{v_{0y}}y$$

となる。 y^2 の係数が負なので、上に凸の放物線であることが分かる。また、 $x = r_{0x} = \text{一定}$ なので、 $x = r_{0x}$ を通る x 軸に垂直な面内の放物線である。さらに、

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t = -\frac{1}{2}g\left(t - \frac{v_{0z}}{g}\right)^2 + \frac{v_{0z}^2}{2g}$$

であるから、最高到達点は $z = v_{0z}^2/2g$ であり、その到達時刻は $t = v_{0z}/g$ と求まる。

【出題意図】

この問題は、位置ベクトルから速度ベクトル、加速度ベクトルを微分によって求める基本技能を確認するとともに、ベクトル表示された運動式から物体の運動の特徴を読み取る力を評価することを目的としている。特に、 x 方向は静止、 y 方向は等速直線運動、 z 方向は重力加速度による等加速度運動であることを理解し、加速度が一定で大きさが g となることを導けるかを問う。さらに、各成分の運動を統合して、質点が鉛直面内の放物運動（斜方投射運動）を行っていることを説明できるかを確認する問題である。

問題 2

【出題意図】

全体として、電磁気学に対する理解度をみることを意図している。(1)(2) は力学の要素も含んでおり、それぞれエネルギー保存、及び外力の働かないときの電子の運動についての問題である。(3)(4) は時間に依存する電磁現象についての理解度をみることを意図している。(3) は電荷の作る電束密度、(4) は変位電流密度と電束密度の関係を問う問題である。

【解答例】

- (1) 点電荷 q を z 方向に電位差 V で加速後、 z 方向へ速さ v で等速直線運動を行うので、エネルギー保存則より、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2 &= qV \\ v &= \sqrt{\frac{2qV}{m}} \quad (\text{答})\end{aligned}$$

- (2) (1) より、電荷は速度 $\mathbf{v} = (0, 0, v)$, 但し、 $v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}$ 。

$t = 0$ のとき、点電荷の位置は $\mathbf{x}(t = 0) = (0, 0, 0)$ 。

点電荷は等速度運動をしているので、時刻 t のとき、点電荷の位置は $\mathbf{x}(t) = (0, 0, vt)$ となる。

$$(\text{答}) (0, 0, \sqrt{\frac{2qV}{m}} t)$$

- (3) 点 P における電束密度 $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$ は、

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) &= \varepsilon_0 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-vt)^2} \frac{(x-0, y-0, z-vt)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-vt)^2}} \\ &= \frac{q}{4\pi} \frac{(x, y, z-vt)}{[x^2 + y^2 + (z-vt)^2]^{3/2}}\end{aligned}$$

$$(\text{答}) \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi} \frac{(x, y, z - \sqrt{2qV/m} t)}{[x^2 + y^2 + (z - \sqrt{2qV/m} t)^2]^{3/2}}$$

- (4) 点 P における変位電流密度は

$$\mathbf{i}_d(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$$

となるので、各成分について計算を行う。

$$i_{dx}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{qx}{4\pi} 3v(z - vt)[x^2 + y^2 + (z - vt)^2]^{-5/2}$$

$$i_{dy}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{qy}{4\pi} 3v(z - vt)[x^2 + y^2 + (z - vt)^2]^{-5/2}$$

$$\begin{aligned} i_{dz}(\boldsymbol{x}, t) &= \frac{q(z - vt)}{4\pi} 3v(z - vt)[x^2 + y^2 + (z - vt)^2]^{-5/2} - \frac{qv}{4\pi} [x^2 + y^2 + (z - vt)^2]^{-3/2} \\ &= \frac{qv}{4\pi} [2(z - vt)^2 - x^2 - y^2][x^2 + y^2 + (z - vt)^2]^{-5/2} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad \boldsymbol{i}_d(\boldsymbol{x}, t) = \frac{qv}{4\pi[x^2 + y^2 + (z - vt)^2]^{5/2}} (3x(z - vt), 3y(z - vt), 2(z - vt)^2 - x^2 - y^2),$$

$$\text{ただし、} v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}$$

問題 3.

$$1) H = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}, \quad Hu(x) = Eu(x)$$

$$2) [\omega] = 1/T, E = mc^2 = \hbar\omega \text{ より、} [\hbar\omega] = ML^2/T^2. \therefore [\hbar] = ML^2/T$$

従って $[\frac{\hbar}{m\omega}] = L^2$ となるので $\xi \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$ は無次元量。

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}(-\partial_\xi^2 + \xi^2) \text{ と書けるので、} E \equiv \hbar\omega\lambda \text{ において } \frac{1}{2}(-\partial_\xi^2 + \xi^2)u(\xi) = \lambda u(\xi)$$

$$3) a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \partial_\xi), a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \partial_\xi) \text{ を用いて } H = \frac{\hbar\omega}{2}(aa^\dagger + a^\dagger a)$$

4) $[a, a^\dagger] = 1$ より、 $N \equiv a^\dagger a$ は $[N, a] = -a$, $[N, a^\dagger] = a^\dagger$ を満たすので、 N の固有値 n をもつ固有状態を $|n\rangle$ とすれば、 $a^k|n\rangle \propto |n-k\rangle$, $k = 1, 2, \dots$ が確認される。ところが $n = \langle n|N|n\rangle = |a|n\rangle|^2 \geq 0$ でなければならないから、 $a^k|n\rangle \neq 0$, $a^{k+1}|n\rangle = 0$ となる負でない整数 k が存在する。このとき $Na^k|n\rangle = 0$ となるから、 $a^k|n\rangle \propto |0\rangle$ である。 $(a^\dagger)^n|0\rangle \propto |n\rangle$ となるので N の固有値は負でない整数 n であり、 $H = \hbar\omega(N + \frac{1}{2})$ の固有値は $E = E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ であることがわかる。

$$5) a\psi_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \partial_\xi)\psi_0(\xi) = 0 \text{ より、} \psi_0 = e^{-\frac{\xi^2}{2}} = e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

$$6) \psi_{0;l}(x) = e^{-\frac{i}{\hbar}pl}\psi_0 = e^{-l\frac{\partial}{\partial x}}e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} = e^{-\frac{m\omega(x-l)^2}{2\hbar}}$$

$$7) p = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} = -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(a - a^\dagger)$$

$$8) |0;l\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}pl}|0\rangle = e^{-l\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(a-a^\dagger)}|0\rangle. e^{ba^\dagger+ca} = e^{\frac{bc}{2}}e^{ba^\dagger}e^{ca} \text{ を } b = -c = l\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \text{ の場合に用いて } |0;l\rangle = e^{\frac{bc}{2}}e^{ba^\dagger}e^{ca}|0\rangle = e^{-\frac{b^2}{2}}e^{ba^\dagger}|0\rangle = e^{-\frac{m\omega l^2}{4\hbar}}e^{l\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}a^\dagger}|0\rangle$$

$$9) e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|0;l\rangle = e^{-\frac{i\omega t}{2}}e^{-i\omega tN}e^{-\frac{m\omega l^2}{4\hbar}}e^{l\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}a^\dagger}|0\rangle = e^{-\frac{i\omega t}{2}-\frac{m\omega l^2}{4\hbar}}e^{-i\omega tN}e^{l\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}a^\dagger}|0\rangle = e^{-\frac{i\omega t}{2}-\frac{m\omega l^2}{4\hbar}}e^{l\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}}e^{-i\omega t}a^\dagger|0\rangle. \text{ ここで公式 } e^{ba^\dagger}e^{ca} = e^{-\frac{bc}{2}}e^{ba^\dagger+ca} \text{ を } b = -c = l\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \text{ の場合に用いて } e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|0;l\rangle = e^{-\frac{i\omega t}{2}-\frac{m\omega l^2}{4\hbar}}(1-e^{-2i\omega t})e^{-b(a-a^\dagger)}|0\rangle = e^{-\frac{i\omega t}{2}-\frac{m\omega l^2}{4\hbar}}(1-e^{-2i\omega t})e^{-\frac{i}{\hbar}ple^{-i\omega t}}|0\rangle = e^{-\frac{i\omega t}{2}-\frac{m\omega l^2}{4\hbar}}(1-e^{-2i\omega t})|0;le^{-i\omega t}\rangle.$$

$$10) \psi_{0;l}(x, t) = e^{-\frac{i\omega t}{2}-\frac{m\omega l^2}{4\hbar}}(1-e^{-2i\omega t})e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x-le^{-i\omega t})^2} \text{ より、}$$

$$|\psi_{0;l}(x, t)|^2 = e^{-\frac{m\omega l^2}{2\hbar}}(1-\cos 2\omega t)e^{-\frac{m\omega}{\hbar}\{(x-le^{-i\omega t})^2+(x-le^{i\omega t})^2\}} \\ = e^{-\frac{m\omega l^2}{\hbar}}\sin^2 \omega t e^{-\frac{m\omega}{\hbar}\{x^2-2xl\cos \omega t+l^2\cos 2\omega t\}} = e^{-\frac{m\omega}{\hbar}(x-l\cos \omega t)^2}$$

ガウス型の波束が原点を中心に振幅 l で振動する。

[出題意図]

調和振動子の量子論は物理学のあらゆる分野で基本的に重要である。特に近年、コヒーレント状態が様々な場面で応用されている。生成・消滅演算子を用いた基本的な演算ができるかを問う。誘導形式で全て導出できるように工夫してある。

問題4

【出題意図】

(1)(2)では大学初年次レベルの基礎的な数学や力学の知識を確認している。(3)では三角比に関する基本的な知識を組み合わせ、天文学の実際の問題に適用する能力を確認している。

【解答例】細かい計算過程は省略する。

$$(1) \quad \frac{h\nu}{kT} \ll 1 \text{ として1次近似を行うと } \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) = 1 + \frac{h\nu}{kT}$$

$$\text{したがって } B_\nu(T) = \frac{2\nu^2}{c^2} kT.$$

$$(2) \quad \Phi(R,0) = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + (a+b)^2}}$$

このポテンシャルの中で回転運動する物体の運動方程式は

$$\frac{v^2}{R} = \frac{\partial \Phi}{\partial R}$$

と書ける。これを計算して

$$v = R(GM)^{\frac{1}{2}}(R^2 + (a+b)^2)^{-\frac{3}{4}}$$

が得られる。

(3) 太陽の運動の視線方向速度成分は $V_0 \sin l$ である。天体の運動方向と視線方向のなす角を θ とすると、天体の視線方向速度成分は $V \cos \theta$ であるため

$$v_r = V \cos \theta - V_0 \sin l$$

と表せる。ここで太陽～天体～銀河中心のなす角は $\frac{\pi}{2} + \theta$ なので、正弦定理から

$$\frac{R}{\sin l} = \frac{R_0}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}$$

である。ところで $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$ なので、結局

$$v_r = \left(\frac{R_0}{R}V - V_0\right) \sin l$$

と求められる。